

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

3.1 Introduction

Dans la pratique le physicien est souvent confronté à des problèmes à plusieurs dimensions ou plusieurs variables et les modèles mathématiques utiliser engendre des systèmes d'équations linéaires (intensité du courant dans un réseaux électrique passif, contraintes et déplacement dans un système mécanique etc.), aussi plusieurs problèmes mathématiques nécessite la résolution d'un système d'équations linéaires (problème à valeurs propres, interpolation, approximation de données, équations différentiels etc.).

Dans ce chapitre nous allons voir les méthodes numériques directes et itératives utiliser pour résoudre ce type de problème en passant par les notions des matrices.

Exemple Pratique :

Une des problème classique de système d'équations linéaires qu'on rencontre et le problème des réseaux électrique. Soit le schéma électrique suivant la détermination du courant qui passe a travers la résistance R_4 nécessite l'utilisation des loi de maille de Kirchhoff ce qui conduit au équations suivantes:

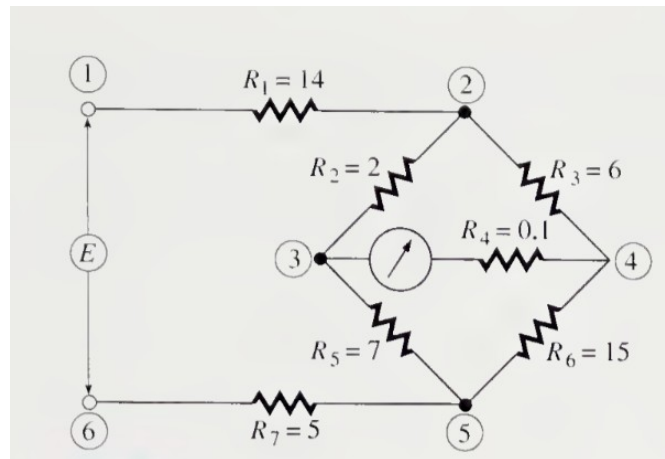


Fig. 1: Exemple de la méthode de point fixe

$$E = R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) + R_5 (I_1 - I_3) + R_7 I_1$$

$$0 = R_2 (I_2 - I_1) + R_3 I_2 + R_4 (I_2 - I_3)$$

$$0 = R_4 (I_3 - I_2) + R_6 I_3 + R_5 (I_3 - I_1)$$

qui peuvent se maître sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_5 + R_7 & -R_2 & -R_5 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ -R_5 & -R_4 & R_4 + R_6 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

3.2 Notions et Définitions

Soit le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Si pour chaque fonction de ce système :

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \text{et } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R} \\ f_i(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) = \alpha f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Alors on dit que la fonction f_i est linéaire, et dans ce cas le système (3.1) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2)$$

Ou

$$[A][X] = [B] \quad (3)$$

[A] c'est un ensemble de $m \times n$ nombre réels (ou complexes) rangé dans un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes, nommé matrice numérique du système. Les nombres a_{ij} ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$) qui composent la matrice donnée se nomment *éléments* de A.

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

Remarque : On dit que la matrice A est d'ordre $m \times n$.

- _ Si $m=n$ alors la matrice est carrée d'ordre n .
- _ $m > n$ on dit que le système est surdéterminé.
- _ X et B sont nommés des vecteurs colonnes.

Dans ce qui va suivre nous n'allons traiter que les systèmes qui engendrent des matrices carrées d'ordre n .

3.2.2 Matrices particulières

Dans la partie qui vient venir on prend en considération les matrices qui vérifient $m=n$, donc les matrices carrées :

_ La matrice dont tous les éléments sont nuls est une *matrice nulle*.

_ La matrice dont tous les éléments sont nuls sauf ceux dont les indices i et j sont égaux est appelé *matrice diagonale*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0, \dots, 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0, \dots, a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Si les éléments $a_{ii}=1$, alors la matrice est unitaire et nommée I_n .

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0, \dots, 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0, \dots, 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Un nombre scalaire peut être considéré comme une matrice 1×1

_ si $a_{ij}=0$ quel que soit $i < j$ alors la matrice est triangulaire supérieure.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ii} & \dots a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_{nn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ou triangulaire inférieure si $a_{ij}=0$ quel que soit $i > j$ alors la matrice est triangulaire inférieure.

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots 0 \\ a_{i1} & \dots a_{ii-1} & a_{ii} & \dots 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

3.2.3 Opérations sur les matrices :

Deux matrices $A=[a_{ij}]$ et $B=[b_{ij}]$ sont égales si elles sont de même ordre et :

$a_{ij}=b_{ij}$ pour toutes les valeurs de i et de j .

Sommation des matrices :

On appelle somme de deux matrices $A=[a_{ij}]$ et $B=[b_{ij}]$ de même ordre la matrice $C=[c_{ij}]$ dont les éléments sont :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (8)$$

La définition de la somme des matrices entraîne les propriétés suivantes :

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$
2. $A+B=B+A$
3. $A+0=A$

Produit d'une matrice par un nombre :

Le produit d'une matrice $A=[a_{ij}]$ d'ordre n par un nombre α est la matrice B dont les éléments sont :

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \quad (9)$$

où on écrit :

$$B = \alpha A \quad (10)$$

D'où les propriétés suivantes :

- $1.A=A$
- $0.A=0$
- $\alpha (\beta.A) = (\alpha \cdot \beta).A$
- $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$
- $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

Produit matriciel:

Le produit d'une matrice $A=[a_{ij}]$ de dimension $n \times p$ par la matrice $B=[b_{ij}]$ de dimension $p \times m$ est la matrice $C=[c_{ij}]$ dont les éléments sont :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (11)$$

Le produit matriciel bénéficie des propriétés suivantes :

- $A.B \neq B.A$ (dans la majorité des cas)
- $A.(B.C) = (A.B).C$
- $A.(B+C) = A.B + A.C$
- $\alpha.(A.B) = (\alpha.A).B$

3.2.4 Transposée d'une matrice :

La matrice transposée de la matrice $A = [a_{ij}]$ est la matrice $A^T = [a_{ji}^T]$ dont les éléments sont définis par :

$$a_{ij}^T = a_{ji} \quad (12)$$

si $A=A^T$ alors A est dite symétrique.

Propriétés :

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A.B)^T = B^T A^T$

3.2.5 Matrice régulière et inverse de matrice

Déterminant de matrice :

une matrice A carrée est liée à un nombre $\det(A)$ dit déterminant de A .

Définition:

Le déterminant d'une matrice carrée $n \times n$, $A=(a_{ij})$, noté par $\det(A)$ ou $|A|$, est la somme suivante, qui est obtenue par la somme sur toutes les permutations possibles $\sigma = j_1, j_2, j_3, \dots$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad (13)$$

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

Le déterminant de la matrice carrée $A_{n \times n}$ est dit d'ordre n , et est noté fréquemment par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii-1} & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (14)$$

Il ne faut pas confondre entre les deux notions. La matrice est un tableau de données ordonné par contre le déterminant est un nombre défini par des règles bien connues.

Théorème 1: Soit A une matrice carrée.

- 1) Si A a une ligne de zéros (ou une colonne), alors $\det(A) = 0$.
- 2) Si A a deux lignes identiques (ou colonnes), alors $\det(A) = 0$.
- 3) Si A est triangulaire, c'est-à-dire A est constituée de zéros au-dessus ou au-dessous de la diagonale, alors :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

produit des éléments diagonaux. Ainsi en particulier $\det(I) = 1$ où I est la matrice identique. Le théorème suivant montre comment le déterminant d'une matrice est affecté par les opérations "élémentaires".

Théorème 2: Soit B la matrice obtenue à partir de la matrice A :

- 1) par multiplication d'une ligne (colonne) de A par un scalaire k ; alors $\det(B) = k \cdot \det(A)$
- 2) en échangeant deux lignes (colonnes) de A : alors $\det(B) = -\det(A)$.
- 3) en additionnant un multiple d'une ligne (colonne) de A à un autre ; alors $\det(B) = \det(A)$.

Théorème 3 : Soit A une matrice carrée $n \times n$ quelconque. Les énoncés suivants sont équivalents.

- 1) A est inversible, c'est-à-dire A a une matrice inverse A^{-1} .
- 2) A est non singulière, c'est-à-dire $AX = 0$ admet seulement la solution nulle, ou le *rang* $A = n$, ou les lignes (colonnes) de A sont linéairement indépendantes.
- 3) Le déterminant de A n'est pas nul : $\det(A) \neq 0$

Théorème 4 : Le déterminant est une fonction multiplicative, c'est-à-dire que le déterminant d'un produit de deux matrices A et B est égal au produit de leurs déterminant:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Propriétés :

$$a) A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

$$b) (A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

c) $\det(A^{-1})=1/\det(A^{-1})$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{13}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{1n}}{\Delta} \\ \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{2n}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{i1}}{\Delta} & \frac{A_{i2}}{\Delta} & \frac{A_{i3}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{in}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{\Delta} & \frac{A_{n2}}{\Delta} & \frac{A_{n3}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\Delta = \det(A)$$

A_{ij} sont les cofacteurs (mineurs avec leur signes) des éléments correspondants a_{ij} La matrice $A'=[A_{ij}]$

3.3 Méthodes Directes de résolution des systèmes d'équation

Considérant le problème du système $AX=B$ où A est une matrice d'ordre n et X et B sont des vecteurs colonne de dimension n .

$$X = A^{-1} B \quad (16)$$

Mais pour déterminer l'inverse de cette matrice il est impératif de passer par des opérations arithmétiques dont le nombre augmente par l'augmentation de l'ordre de la matrice. Les méthodes de résolution des systèmes (III.2) se regroupent dans deux grandes catégories :

1) *Méthodes directes.*

2) *Méthode itératives.*

Une méthode de résolution est directe si elle donne, au bout d'un nombre fini (éventuellement grand) d'opérations logiques et arithmétiques et dans l'hypothèse de l'absence d'arrondis, une solution exacte du problème. Par contre, les méthodes itératives sont des méthodes convergeant asymptotiquement vers la solution pour un nombre d'opérations tendant vers l'infini.

La méthode décrite au dessus et à la base de la méthode dite de Cramer qui passe par le calcul du déterminant Δ et des déterminants Δ_i correspondant à chaque élément du vecteur colonne X . Mais du fait que le nombre des opérations nécessaire pour résoudre le système (III.2) par la méthode de Cramer est de l'ordre de $n! + n^2(n-1)! + n^2$, cette technique reste pratique pour les système de faible dimension et elle devient très coûteuse pour les grands systèmes.

Exemple :

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

Pour un système où $n=10$ il faut $\approx 3.10^9$ opérations.

Et pour $n=50$ il faut $\approx 7.10^{67}$ opérations

3.3.2 Système triangulaire

Soit le système triangulaire supérieur suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_i \\ b_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

On remarque bien que pour ce type de système on peut procéder par remonter :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \quad (18)$$

Pour $i=n-1, \dots, 1$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right)$$

Dans le cas d'un système triangulaire inférieur la méthode n'est pas trop différente :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (19)$$

Pour $i=2, \dots, n$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right)$$

Algorithme methode de remonter :

```
Début
Lire A, B
 $x_n = b_n / a_{nn}$ 
pour i=n-1,..., 1 faire :
  s=0
  Faire de j=i+1,...,n fair
     $s = s + a_{ij} x_j$ 
  fin pour
   $x_i = (b_i - s) / a_{ii}$ 
pour i=n-1, 1 faire :
  fin
```

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

Exemple python : résoudre par la méthode de remonter le système d'équation suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Solution : Remonte.py

Execution :

```
A=
[1, 2, 3]
[0, 4, 5]
[0, 0, 6]
B=
5
7
9
X=
0.75
-0.125
1.5
```

3.3.3 Décomposition LU (Méthode de Crout)

Si un système d'équations linéaires est représenté par une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) il suffit d'utiliser l'algorithme de remonté (ou de décente) directement pour obtenir le résultats. Lorsque la matrice A est constituée d'un produit de deux matrices une triangulaire supérieure U et l'autre triangulaire inférieure L il est possible de résoudre le système $AX=B$ par:

$$L \cdot U \cdot X = B \quad (20)$$

on pose :

$$U \cdot X = Y$$

donc on résout le système

$$L \cdot Y = B$$

par décente et on détermine Y puis on trouve la valeur de X par l'utilisation de la méthode de remonter pour le système

$$U \cdot X = Y$$

le plus difficile reste à décomposer la matrice A en LU .

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} \quad (21)$$

La méthode de Crout est fondée sur la factorisation LU qui affirme que pour une matrice carrée $A=(a_{ij})$ d'ordre n soit inversible, il existe une matrice triangulaire inférieure $L=(l_{ij})$ avec $l_{ii}=1$ ($1 \leq i \leq n$) et une matrice triangulaire supérieure $U=(u_{ij})$ tel que $A=LU$. Cette décomposition est unique. En particulier, toute matrice inversible admet une factorisation LU. L'algorithme est alors le suivant :

On calcule les matrices L et U tel que $A=LU$ par les formules :

$$\begin{aligned} u_{1j} &= a_{1j} \quad j=1\dots,n \\ l_{i1} &= a_{i1}/u_{11} \quad i=1\dots,n \\ l_{ii} &= 1 \quad i=1\dots,n \\ l_{ij} &= 0 \quad j=i+1\dots,n \\ u_{ij} &= 0 \quad j=1\dots,i-1 \\ u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \\ l_{ij} &= (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} \end{aligned} \quad (22)$$

avec :

$$\det(A) = \det(L) \det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii} \quad (23)$$

Dans certains algorithmes professionnels de décomposition LU le résultat final est stocké dans la matrice originale pour économiser l'espace mémoire:

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & u_{44} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

et comme condition à ne pas oublier dans l'algorithme de résolution

$$l_{ii}=1 \quad i=1 \dots, n$$

si pour effectuer la factorisation on place comme condition de départ

$$u_{ii}=1 \quad i=1 \dots, n$$

alors c'est l'algorithme de Doolittle [5]

Exemple (Méthode de Crout) : décomposer la matrice suivante en un produit LU

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

solution :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

premièrement :

$$u_{1j} = a_{1j} \quad j=1 \dots, n$$

$$l_{i1} = a_{i1} / u_{11} \quad i=1 \dots, n$$

donc :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} * u_{12} \quad \text{donc} \quad u_{22} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} * u_{13} \quad \text{donc} \quad u_{23} = 2 - \frac{1}{2} * 2 = 1$$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31} * u_{12}) / u_{22} \quad \text{donne} \quad l_{32} = (4 - \frac{3}{2} * 3) / (\frac{3}{2}) = -\frac{1}{3}$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31} * u_{13} - l_{32} * u_{23} \quad u_{33} = 1 - \frac{3}{2} * 2 + \frac{1}{3} * 1 = -\frac{5}{3}$$

finalement :

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{array} \right]$$

Exemple python :

Condition d'application de la méthode de décomposition LU :

les mineurs principaux de A sont positifs : sont les déterminants des matrices tronquées

$$\det(A_1) = a_{11} \neq 0, \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \dots \quad (25)$$

$$\det(A) \neq 0$$

Algorithme de LU :

```

Début
Lire A,
Pour i=1,...,n faire :
  Pour j=i,...,n faire
    s=0
    Pour k=1,...,i-1 faire
      s=s+likukj
    fin
    uij=aij-s
    lii=1.0
  Pour j=i+1,...,n faire
    s=0
    Pour k=1,...,i-1 faire
      s=s+ljkuki
    fin
    lji=(aij-s)/uii
  fin
fin
    
```

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

pour la suite de résolution du problème on utilise l'algorithme de remonter et de descente décrits au paravent.

Exemple : Code LU.py : décomposé la matrice : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

```
A=
[[2. 3. 2.]
 [1. 3. 2.]
 [3. 4. 1.]]
L=
[[1. 0. 0.]
 [0.5 1. 0.]
 [1.5 -0.33333333 1.]]
U=
[[2. 3. 2.]
 [0. 1.5 1.]
 [0. 0. -1.66666667]]
L @ U =
[[2. 3. 2.]
 [1. 3. 2.]
 [3. 4. 1.]]
```

3.3.4 Méthode de Cholsky(ou Cholesky–Banachiewicz) :

La méthode de Cholski s'applique a des matrice symétrique dite définie positif, une matrice est définie positif si elle vérifie la condition suivante :

définition :

une matrice est dite « *définie positif* » si elle est symétrique et vérifie pour tout vecteur X non nulle de dimension n :

$$X^T \cdot A \cdot X > 0 \quad (26)$$

du faite qu'il est impossible de vérifier cette condition pour tout vecteur X le théorème suivant est plus pratique :

Théorème : Si A est une matrice symétrique a « n » dimension est dite définie positif alors elle vérifie une des conditions suivante(I ou II) :

I) : A est non singulière .($\det(A) \neq 0$).

a) $a_{ii} > 0 \quad i=1, n$.

b) $\max_{1 \leq k, j \leq n} |a_{kj}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|$

c) $a_{ij}^2 < a_{ii} a_{jj} \quad i \neq j$

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

II) les mineurs principaux de A sont positifs : sont les déterminants des matrices tronquées

$$\det(A_1) = a_{11} > 0, \det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \det(A_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \dots \quad (27)$$

$$\det(A) > 0$$

Si une matrice est définie positive alors il existe une matrice triangulaire inférieure L de sorte que :

$$A = L \cdot L^T \quad (28)$$

Cholsky a présenté une méthode pour la décomposition des matrices carrées définies positives semblable à la méthode de décomposition LU :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1} = a_{i1} / l_{11} \quad i = 2, \dots, n$$

après avoir calculé les (i-1) premières colonnes

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \quad (30)$$

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right) \quad i+1 \leq j \leq n$$

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

Algorithme de LL^T

```
Début
Lire A
Pour i=1,...,n faire
    s=0
    Pour k=1,...,i-1 faire
         $s = s + l_{ik}^2$ 
    Fin Pour
     $l_{ji} = \sqrt{(a_{ij} - s)}$ 
    Pour j=i+1,...,n faire
        s=0
        Pour k=1,...,i-1 faire
             $s = s + l_{jk} l_{ik}$ 
        Fin Pour
         $l_{ji} = (a_{ji} - s) / l_{ii}$ 
    Fin Pour
Fin Pour
```

exemple :

Code LLT.py : décomposition en LL^T de $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

```
L =
[[2.    0.    0.    ]
 [1.    2.    0.    ]
 [1.    0.    2.23606798]]
L.T =
[[2.    1.    1.    ]
 [0.    2.    0.    ]
 [0.    0.    2.23606798]]
L @ L.T =
[[4. 2. 2.]
 [2. 5. 1.]
 [2. 1. 6.]
```

3.3.5 Méthode de Gauss :

La méthode de Gauss est considérée comme la plus populaire parmi les méthodes directes, c'est la méthode la plus élémentaire des méthodes directes, celle que tout un chacun a déjà pratiquée sans le savoir sur des matrices (2x2) ou (3x3).

Le principe de la méthode est d'effectuer une série d'opérations arithmétiques sur les éléments de la matrice de manière à la transformer en matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), et ensuite utiliser la méthode de remontée (ou de descente) pour résoudre le système obtenu.

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

Exemple simple : Prenons l'exemple du système 3X3 suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 \\ a_{31}^0 & a_{32}^0 & a_{33}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \\ b_3^0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

1^{ère} étape :

Rendre la matrice triangulaire supérieure pour cela procédons par ligne :

Pour rendre l'élément $a_{31}=0$ on multiplie la ligne (1) L_1 par $-a_{31}/a_{11}$ et on l'ajoute à la ligne L_3 , on calcule :

$$L_3^1 = L_3^0 - \frac{a_{31}^0}{a_{11}^0} L_1^0 \quad (32)$$

L'indice supérieur désigne l'étape de calcul.

On obtient :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 & a_{23}^0 \\ 0 & a_{31}^1 & a_{33}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \\ b_3^1 \end{pmatrix}$$

Pour rendre l'élément $a_{21}=0$ on multiplie la ligne (1) L_1 par $-a_{21}/a_{11}$ et on l'ajoute à la ligne L_2 , on calcule :

$$L_2^1 = L_2^0 - \frac{a_{21}^0}{a_{11}^0} L_1^0$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ 0 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^1 \\ b_3^1 \end{pmatrix}$$

On passe maintenant à la colonne 2 et on rend les éléments au-dessous de la diagonal nuls :

Pour rendre l'élément $a_{32} \neq 0$ on multiplie la ligne (2) L_2 par $-a_{32}/a_{22}$ et on l'ajoute à la ligne L_3 , on calcul :

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$L_3^2 = L_3^1 - \frac{a_{32}^1}{a_2^1} L_2^1$$

Et on obtient la forme finale :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 & a_{13}^0 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^1 \\ b_3^2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Remarque : lorsqu'on parle de la ligne (i) on désigne les éléments de la matrice A et les éléments du vecteur B.

2^{iem} étape :

Le système obtenu sera ensuite résolu par la méthode de remontée.

Remarque :

Il est souvent conseillé d'augmenter la matrice A_{nn} et lui ajouter les éléments du vecteur B d'une manière à obtenir la matrice A'_{nn+1} et ainsi l'ensemble des opérations effectuées seront faites sur la nouvelle matrice augmentée.

Si les éléments diagonaux de la matrice obtenue dans la dernière opération sont différents de zéro alors la matrice est inversible et la solution du système est obtenue par l'application de l'algorithme de la méthode de remontée.

Le nombre des opérations :

La résolution d'un système d'équation linéaire par la méthode de gauss nécessite :

La triangularisation :

$Nm = n(n^2 - 1)/3$	multiplications
$Na = Nm$	additions
$Nd = n(n - 1)/2$	divisions

Pour résoudre le système triangulaire il faut :

$Nm = n(n - 1)/2$	multiplications
$Na = Nm$	additions
$Nd = n$	divisions

Alors en total :

$Nm = n(n - 1)(2n + 5)/6$	multiplications
$Na = Nm$	additions
$Nd = n(n + 1)/2$	divisions

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

Algorithme de Gauss :

```
Début
Lire A, B
Pour k=1,...,n-1 faire
  Pour i=k+1,...,n faire
    m=aik/akk
    Pour j=k,...,n faire
      aij=aij-m akj
    Fin Pour
    bi=bi-m bk
  Fin Pour
Fin Pour
Pour i=n,...,1 faire
  s=0
  Pour j=i+1,...,n faire
    s=s+aijxj
  Fin Pour
  xi=(bi-s)/aii
Fin Pour
Afficher x
Fin
```

applique le code gauss pour le system suivant :
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```
A triangulaire =
[[ 2.    3.    2.    ]
 [ 0.    1.5   1.    ]
 [ 0.    0.    -1.66666667]]
b =
[1.  1.5 2. ]
Solution X =
[-1.  1.8 -1.2]
```

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

3.3.6 Méthode de Jordan :(Jordan-Gauss)

La méthode de Jordan consiste à transformer le système Cramérien $AX=B$ en un système $A'X=B'$ ou A' est une matrice d'identité d'ordre n . Cette diagonalisation est opérée en n étapes qui se compose d'une opération de normalisation suivie d'une opération de réduction.

Description de la méthode : Soit le système suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

La première étape :

Cette étape consiste à multiplier la première ligne L_1^0 par $1/a_{11}$ et puis pour rendre les éléments de la première colonne (sauf l'élément diagonale) nuls il faut multiplier la ligne L_1^1 par $-a_{k1}^0$ et l'additionner à la ligne L_k^0 donc :

$L_k^1 = L_k^0 - L_1^0 * a_{k1}^0$ donc on obtient en fin de compte le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{14}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & a_{24}^1 \\ 0 & a_{32}^1 & a_{33}^1 & a_{34}^1 \\ 0 & a_{42}^1 & a_{43}^1 & a_{44}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ b_3^1 \\ b_4^1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

La deuxième étape :

Dans celle-ci étape consiste à multiplier la deuxième ligne L_2^1 par $1/a_{22}$ et puis pour rendre les éléments de la deuxième colonne (sauf l'élément diagonale) nuls il faut multiplier la ligne L_2^2 par $-a_{k2}^1$ et l'additionner à la ligne L_k^1 donc :

$L_k^2 = L_k^1 - a_{k2}^1 L_2^2$ donc on obtient en fin de compte le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13}^2 & a_{14}^2 \\ 0 & 1 & a_{23}^2 & a_{24}^2 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 & a_{34}^2 \\ 0 & 0 & a_{43}^2 & a_{44}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ b_4^2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Et on continue le processus jusqu'à obtenir une matrice identité dans l'étape n :

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^n \\ b_2^n \\ b_3^n \\ b_4^n \end{pmatrix} \quad (36)$$

Remarque :

On obtient le même résultat si on utilise la méthode de Gauss jusqu'à l'étape où la matrice obtenue est triangulaire supérieure puis on utilise une méthode similaire à la première mais en partant de la dernière colonne et on annule ces éléments sauf l'élément diagonal, puis on passe à la colonne antérieures, jusqu'à la première ligne et ainsi on obtient une matrice diagonale. En fin de compte nous normalisons les éléments de la diagonale et la solution du système se trouve dans la colonne vecteur B'.

Le Nombre des opérations :

En total :

$Nm = n(n^2 - 1)/2$	multiplications
$Na = Nm$	additions
$Nd = n(n + 1)/2$	divisions

Algorithme :

Début

Lire A, B

Pour k=1,...,n faire

 Pour i=1,...,n faire

 Si $i \neq k$ alors

$m = a_{ik}/a_{kk}$

 Pour j=k,...,n faire

$a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$

 Fin Pour

$b_i = b_i - m b_k$

 Fin Si

 Fin Pour

Fin Pour

Pour i=1,...,n faire

$x_i = b_i/a_{ii}$

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

exemple : utiliser le code de Jordan-gauss pour résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```
A triangulaire =  
[[ 2.    3.    2.   ]  
 [ 0.    1.5   1.   ]  
 [ 0.    0.   -1.66666667]]  
b =  
[1. 1.5 2.]  
Solution X =  
[-1. 1.8 -1.2]
```

Méthode de Gausse et Matrice Tridiagonale (Méthode de Thomas):

Les systèmes tri-diagonaux surgissent souvent dans la résolution des équations différentielles ordinaires d'ordre 2 et dans plusieurs problèmes d'analyse numérique. Ce type de problème peut être résolu par les méthodes classiques telles que méthode de Gauss, Jordan-Gauss ou décomposition LU , mais vu qu'au lieu de stocker $N \times (N+1)$ données alors que sauf $4 \times N$ des informations sont significatives le reste ne sont que des zéros, il existe d'autres algorithmes adaptés à cette situation.

3.3.7 Méthode de Thomas:

soit le système suivant :

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & . \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} \quad (37)$$

Lors de la programmation sur un ordinateur, on remarque qu'un grand nombre de d'éléments sont nuls et ne seront pas pris en considération alors il est préférable de stocker les informations du système d'une manière différente :

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdot \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

dont le nombre d'éléments stockée passe de $n*n$ à $3n$, on peut le mettre sous la forme:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad (39)$$

si on applique l'algorithme de Gauss à ce système on trouve facilement qu'il se résume à l'algorithme suivant: pour $k=1,n$

$$\begin{aligned} m &= \frac{a_k}{b_{k-1}} \\ b_k &= b_k - m * c_{k-1} \\ d_k &= d_k - m * d_{k-1} \end{aligned} \quad (40)$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{pmatrix} b'_0 & c'_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b'_1 & c'_1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & b'_2 & c'_2 & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & b'_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_0 \\ d'_1 \\ d'_2 \\ \dots \\ d'_n \end{pmatrix} \quad (41)$$

dont la résolution s'effectue suivant le schéma :

$$x_n = \frac{d_n}{b_n} \quad (III.42)$$

pour $k= n-1$ jusqu'à 0

3 RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

3.4 Méthodes Itératives :

3.4.1 Introduction

Contrairement aux méthodes directes, les processus itératifs de résolution d'un système d'équations linéaires ne fournissent qu'une approximation de la solution suivant une série d'opérations de corrections effectuées sur une solution initiale proposée. Le nombre d'opérations requises dépend de l'ordre de l'approximation imposée et bien sûr de l'ordre du système.

Norme matricielle :

Pour comparer des entités à plusieurs composants comme les matrices et les vecteurs on utilise leurs grandeurs. Dans le cas des scalaires la comparaison s'effectue à travers leurs valeurs absolues, c'est pour cela qu'on introduit la notion de norme de vecteurs ou de matrices qui joue le même rôle. Une norme matricielle doit vérifier les conditions suivantes :

Si on désigne $\|A\|$ la norme d'une matrice ou d'un vecteur alors :

- 1) $\|A\| > 0$ et si $\|A\| = 0$ alors $A = 0$.
- 2) $\|k \cdot A\| = |k| \cdot \|A\|$ k est un scalaire.
- 3) si A et B deux matrices de même ordre $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (inégalité triangulaire))
- 4) et $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Dans le cas des vecteurs on peut utiliser la norme dite euclidienne, si x_i sont les composantes de V alors :

$$\|V\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

Ce n'est pas la seule manière de définir la norme d'un vecteur il existe plusieurs citons :

$$\|V\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{p-norme})$$

$$\|V\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{somme des valeurs absolues})$$

$$\|V\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

Pour les matrices on utilise les expressions suivantes pour définir la norme :

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \\ \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \\ \|A\| &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (44)$$

(Qu'on présente souvent comme étant la norme euclidienne d'une matrice).

3.4.2 Méthode de Jacobi :

Le système d'équations : $Ax=B$ Se transforme facilement en :

$$X = B' X + C \quad (45)$$

Et sa solution est cherchée comme la limite de la suite :

$$X^{k+1} = B' X^k + C \quad (46)$$

Il est évident que tout système

$$X = X - D(AX - B) \quad (.47)$$

s'écrit comme (3.44) est équivalent à (3.40) pour $\det D \neq 0$. D'autre part, chaque système (3.45) s'écrit sous la forme (3.46) de matrice :

$$D = (I - B') A^{-1} \quad (48)$$

Prenons l'exemple suivant : Soit le système :

$$\begin{aligned} 6x - 2y + z &= 11 \\ x + 2y - 5z &= -1 \\ -2x + 7y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Qu'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{6}(11 + 2y - z) \\ y &= \frac{1}{7}(5 + 2x - 2z) \\ z &= \frac{1}{(-5)}(-1 + x - 2y) \end{aligned}$$

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

et on passe sous forme itérative :

$$x^{k+1} = \frac{1}{6}(11 + 2y^k - z^k)$$

$$y^{k+1} = \frac{1}{7}(5 + 2x^k - 2z^k)$$

$$z^{k+1} = \frac{1}{(-5)}(-1 + x^k - 2y^k)$$

n	x	z	y	erreur
0	0	0	0	—
1	1.83333	0.71428	0.2	1.9777
2	2.03809	1.18095	0.85238	0.8278
3	2.08492	1.05306	1.07999	0.26525
4	2.00435	1.00140	1.03820	0.10443
5	1.99410	0.99032	1.00143	0.10443
6	1.99653	0.99790	0.99495	0.03975
				0.01026

Tab. 1: T solution itérative par la méthode Jacobie

On remarque que la solution converge vers (2.0,1.0,1.0) donc le processus de Jacobi dans sa forme globale s'écrit :

Prenons un ensemble de n équations linéaires pour $1 \leq i \leq n$:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (49)$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right)$$

On se donne un vecteur initial X^0 et on calcul après les X^k par

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right) \quad (50)$$

sous forme matricielle dans le cas d'un système 4x4:

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ x_4^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} & \frac{-a_{14}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} & \frac{-a_{24}}{a_{22}} \\ \frac{-a_{31}}{a_{33}} & \frac{-a_{32}}{a_{33}} & 0 & \frac{-a_{34}}{a_{33}} \\ \frac{-a_{41}}{a_{44}} & \frac{-a_{42}}{a_{44}} & \frac{-a_{43}}{a_{44}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \frac{b_4}{a_{44}} \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$[X^{k+1}] = [J][X^{[k]}] + [B'] \quad (52)$$

Les itération seront stoppées lorsque la condition suivante est vérifiée : $\|X^{k+1} - X^k\| \leq \varepsilon$

Afin que ce processus soit opérationnel il faut choisir une solution initiale, cette solution la plus proche possible de la solution finale permet d'obtenir une convergence rapide.

À chaque itération, on a $(n-1)$ multiplications, n additions et 1 division. Pour stocker A b , les vecteurs x^k et x^{k+1} on utilise $(n^2 + 3n)$ variables mémoires. La méthode ne converge pas toujours. On démontre que si A est une matrice définie positive, la méthode itérative converge. De même, si A est une matrice diagonalement dominante, c'est-à-dire si :

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} a_{ij} \quad (53)$$

alors la méthode de Jacobi converge. Par conséquent, on peut avoir intérêt à réarranger les termes de D de façon à mettre D sous la forme d'une matrice dont les éléments diagonaux sont les plus grands possibles.

Forme Matriciels :

Il est possible de formuler la méthode de Jordan sous la forme suivante :

$$Ax = B$$

Si on développe $A = D - E - F$ en trois matrices :

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & 0 \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & 0 & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le Problème peut se maître :

$$(D - E - F)X = B, DX = (E + F)X + B \text{ donc } DX^{k+1} = (E + F)X^k + B$$

$$X^{k+1} = D^{-1}(E + F)X^k + D^{-1}B \quad J = D^{-1}(E + F) \quad (54)$$

3.4.3 Méthode de Gauss-Siedel:

Dans la méthode de Jacobi nous utilisons toujours les anciens éléments de la solution pour estimer la nouvelle, et comme dans le cas d'une composante x_i^{k+1} on remarque qu'il y a $i-1$ élément qui ont déjà été estimés alors il est possible de les utiliser pour cette étape et ceci est la philosophie de la méthode de Gauss-Siedel publiée en 1874 par Ludwig Seidel.

Soit pour le système :

$$6x - 2y + z = 11$$

$$x + 2y - 5z = -1$$

$$-2x + 7y + 2z = 5$$

On obtient dans le cas de la méthode de Gauss-Siedel

$$x^{k+1} = \frac{1}{6}(11 + 2y^k - z^k)$$

$$y^{k+1} = \frac{1}{7}(5 + 2x^{k+1} - 2z^k)$$

$$z^{k+1} = \frac{1}{(-5)}(-1 + x^{k+1} - 2y^{k+1})$$

Algorithme :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right) \quad (55)$$

Forme Matriciels :

Il est possible de formuler la méthode de Jordan sous la forme suivante :

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

$$Ax = B$$

Si on développe $A = D - E - L$ en trois matrices :

$$(D - E - F)X = B, (D - E)X = FX + B \text{ donc } (D - E)X^{k+1} = FX^k + B$$

$$X^{k+1} = (D - E)^{-1}FX^k + (D - E)^{-1}B$$

$$T_{GS} = (D - E)^{-1}F \quad (56)$$

Condition de convergence :

Dans les deux méthodes de Jacobi et de Gauss-Siedel la condition de convergence dépend de la forme de la matrice des itérations J et T_{GS} . Pour que la méthode converge le rayon spectral de la matrice d'itérations M doit satisfaire la condition suivante :

$$0 < \rho(M) < 1 \quad (57)$$

Remarque le rayon spectral d'une matrice A est la valeur max en valeur absolue des valeurs propres de A .

Exemple de convergence :

soit le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

déterminer la matrice J et T_{GS} . étudier la convergence de chaque méthode.

Solution :

Méthode de Jacobi

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = D$$

$$J = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul du rayon spectral de J :

les valeurs propres sont les racines du polynôme issue de :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 3)$$

3 RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATION LINÉAIRES

donc

$$\lambda_1=0, \lambda_{2,3}=\pm\sqrt{3}$$

ce qui induit a :

$$\rho(\lambda)=\sqrt{3}>1$$

le système ne converge pas.

3.4.4 Méthode de relaxation

Dans cette méthode on introduit un facteur sur la méthode de Gauss-Seidel pour accélérer la convergence :

$$x_i^{k+1} = (1-\omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) \quad (58)$$

On démontre que si le facteur de relaxation dépasse 2, la méthode diverge. Pour $\omega=1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel. Lorsque $0<\omega<1$, on parle de sous-relaxation et lorsque $1<\omega<2$, on parle de sur-relaxation (SOR, Successive Over Relaxation). Le théorème d'Ostrowski-Reich affirme que si A est une matrice définie positive et si le facteur de relaxation $0<\omega<2$ alors la méthode converge.

Forme Matriciels :

$$(D - \omega E)x^{k+1} = [(1-\omega)D + \omega F]x^k + \omega B$$

Si on devise le tout sur ω on obtient :

$$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)x^{k+1} = \left[\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right]x^k + B$$

donc :

$$x^{k+1} = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left[\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right]x^k + \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} B$$

ou :

$$x^{k+1} = T_{\omega}x^k + B'$$

avec :

$$T_{\omega} = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left[\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right] \quad (59)$$

la condition de convergence est :

$$\rho(T_{\omega}) < 1$$