

CHAPITRE II :

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

NON-LINÉAIRES

II.1 Introduction :

Le problème de la solution d'équation non linéaire $f(x)=0$ est une tâche qui revient fréquemment dans le calcul scientifique sous forme brute ou incluse dans des problèmes compliqués. Il est relativement rare qu'on puisse obtenir ses racines avec précision. Par ailleurs, dans certains cas, les coefficients de l'équation ne sont connus qu'approximativement et, par conséquent, le problème de la détermination précise des racines proprement dit, perd son sens. C'est pourquoi, les méthodes de la recherche approchée des racines d'une équation et l'estimation du degré de sa précision acquièrent un intérêt particulier.

II.2 Existence de solution [1] :

Soit la fonction $f(x)$ définie et continue dans un l'intervalle fini ou infini $a < x < b$. Toute valeur α qui annule la fonction $f(x)$ (c'est-à-dire $f(\alpha)=0$) s'appelle racine de l'équation $f(x)=0$ ou zéro de f .

La recherche approchée des racines d'une équation se fait généralement en deux étapes :

- 1_ Séparation des racines : qui consiste à établir des segments $[a, b]$ les plus serrés possibles contenant une et seulement une seule racine.
- 2_ Amélioration de la précision ou mise au point des racines approchées, c'est-à-dire l'obtention de leur précision imposée.

Théorème I : si une fonction continue $f(x)$ prend aux extrémités des segments $[a, b]$ des valeurs de signe contraires, $f(a)*f(b)<0$, ce segment contient au moins une racine de l'équation $f(x)=0$.

Faite qui est traduit par l'existence de $\alpha \in [a, b]$ tels que $f(\alpha)=0$

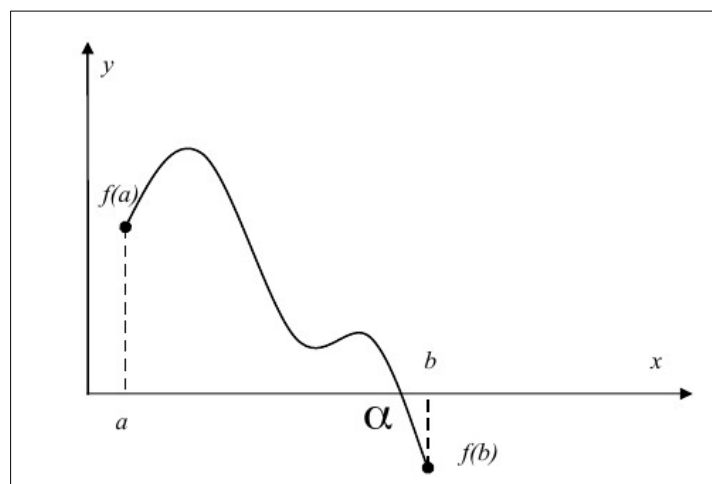


Figure II.1 : Existence des solutions

Exemple : Prenons la fonction $f(x)=\cos(x)-x$, dans l'intervalle $[0,2]$ vérifier si $f(x)$ a un zéro dans cet intervalle.

Solution :

$$f(0) = 1.0000$$

$$f(2) = -1.0006$$

$f(x)$ est continue dans l'intervalle $[0,2]$ et puisque $f(0) \cdot f(2) < 0$ donc il existe $\alpha \in [0,2]$ de sorte que $f(\alpha) = 0$

II.3. Méthode de bisection ou méthode de dichotomie [3]:

En algorithmique, la dichotomie (du grec « couper en deux ») est un processus itératif ou récursif de recherche où à chaque étape l'espace de recherche est restreint à l'une de deux parties

Si f est une fonction continue dans l'intervalle $[a, b]$ et change de signe donc $f(a) \cdot f(b) < 0$ pour chercher la solution de l'équation

$$f(x) = 0 \quad (\text{II.1})$$

On divise cet intervalle en deux $[a, x_1]$ et $[x_1, b]$ ou $x_1 = (a+b)/2$ si $f(x_1) = 0$ alors la solution de (1) est x_1 si non on cherche la solution dans les deux autres intervalles en appliquant le **Théorème I** :

Si $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ la solution cherchée est dans cet intervalle $[a, x_1]$ nommé $[a_1, b_1]$ ou $a_1 = a$ et $b_1 = x_1$.

Sinon la solution est dans l'autre intervalle $[x_1, b]$ nommé $[a_1, b_1]$ ou $a_1 = x_1$ et $b_1 = b$ et on continue le processus de recherche jusqu'à obtenir un intervalle $[a_n, b_n]$ pour lequel

$$|b_n - a_n| < \epsilon \quad (\text{II.2})$$

Où $f(x_n) < \zeta$ tel que $x_n = (a_n + b_n)/2$, avec ϵ et ζ sont les précisions requises pour la solution cherchée.

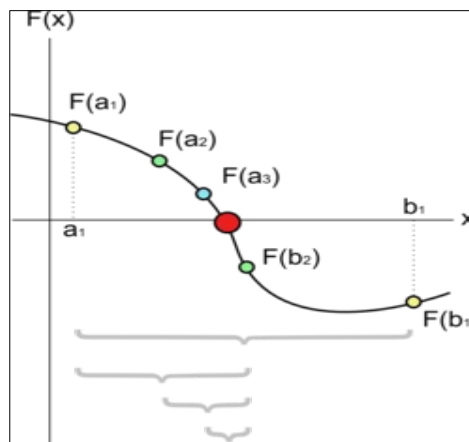


Figure II.2 : méthode de dichotomie

Algorithme :

```

Début
Lire a, b,
Faire tans que   $|b-a| > \epsilon$  |
 $x = (a+b)/2$ 
Si  $f(x)=0$  arrêt du processus
fin si
Si  $f(a).f(x) < 0$        $b=x$ 
Si non                 $a=x$ 
fin si
Fin tans que

```

Exemple : Résoudre l'équation $e^x + 2x = 0$ pour $\epsilon = 0.001$ dans l'intervalle $[-1.0, 0.0]$

Solution :

a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)
-1,0000000	0,0000000	-0,5000000	-1,6321206	1,0000000	-0,3934693
-0,5000000	0,0000000	-0,2500000	-0,3934693	1,0000000	0,2788008
-0,5000000	-0,2500000	-0,3750000	-0,3934693	0,2788008	-0,0627107
-0,3750000	-0,2500000	-0,3125000	-0,0627107	0,2788008	0,1066156
-0,3750000	-0,3125000	-0,3437500	-0,0627107	0,1066156	0,0216062
-0,3750000	-0,3437500	-0,3593750	-0,0627107	0,0216062	-0,0206375
-0,3593750	-0,3437500	-0,3515625	-0,0206375	0,0216062	0,0004629
-0,3593750	-0,3515625	-0,3554688	-0,0206375	0,0004629	-0,0100927

Tableau 2.1 Résolution d'une équation non-linéaire par la méthode de bisection

Après un certain nombre d'itérations on obtient la solution $x = -0,3517337$

Nombre d'itération :

Dans la plupart des opérations le nombre des itérations requises pour déterminer la solution approchée à une certaine précision ϵ valorise la méthode choisie. Pour la technique de *Bisection* le nombre des opérations est donné par :

$$N \geq \log_2 \left(\frac{|a-b|}{\epsilon} \right) \quad (II.3)$$

Exercice : Démontrer la formule précédente.

II.4 Méthode de fausse position (Regula-Falsi) [4] :

Dans cette méthode la recherche de la solution de $f(x)=0$ dans l'intervalle $[a, b]$ passe par le même processus que la méthode de bisection mais au lieu de diviser

le segment $[a,b]$ en deux intervalles égaux, il est plus logique de le diviser dans le rapport $-f(a)/f(b)$ on obtient ainsi la valeur approché de la racine :

$$x_1 = a + h_1, h_1 = \frac{-f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) \quad (\text{II.4})$$

Ou d'un manière plus simple

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (\text{II.5})$$

Graphiquement cela revient à la recherche du point d'intersection entre la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et l'abscisse des x : (figure II.3):

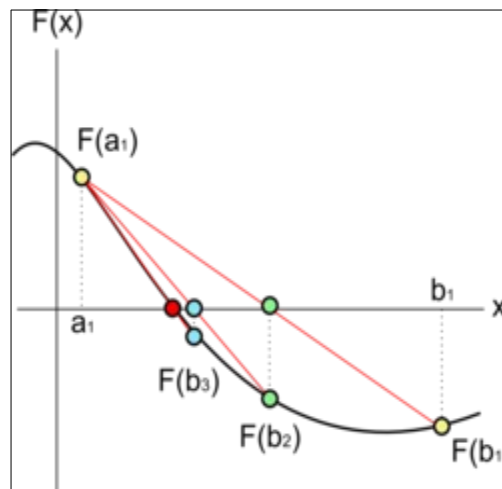


Figure II.3 : Méthode de Régula-falsi.

$$y(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad \text{lors que } y = 0 \quad x = \frac{a * f(b) - b * f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Et on répète le même procédé de recherche que celui de la méthode de bisection c'est-à-dire :

Algorithme :

```

Début
Lire  $a, b, \epsilon$ 
Faire
 $x = (a * f(b) - b * f(a)) / (f(b) - f(a))$ 
Si  $f(x) = 0$  arrêt du processus
Fin si
Si  $f(a) * f(x) < 0$        $b = x$ 
Si non                   $a = x$ 
Fin si
tant que  $|f(x)| > \epsilon$ 

```

Exemple : Trouver $\alpha = \sqrt{2}$ par la méthode de fausse position et comparer le résultat obtenue (le nombre des opérations) avec la méthode de Bissection ($\epsilon = 0.001$).

Solution : Pour trouver $\alpha = \sqrt{2}$ donc $x = \sqrt{2}$ alors $x^2 = 2$ donc $x^2 - 2.0 = 0$, prenons $f(x) = x^2 - 2$ dans l'intervalle $[1.0, 2.0]$ et appliquons la méthode de Régula-falsi :

a	b	X	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$
1,0000000	2,0000000	1,3333333	-1,0000000	2,0000000	-0,2222222
1,3333333	2,0000000	1,4000000	-0,2222222	2,0000000	-0,0400000
1,4000000	2,0000000	1,4117647	-0,0400000	2,0000000	-0,0069204
1,4117647	2,0000000	1,4137931	-0,0069204	2,0000000	-0,0011891
1,4137931	2,0000000	1,4141414	-0,0011891	2,0000000	-0,0002041
1,4141414	2,0000000	1,4142012	-0,0002041	2,0000000	-0,0000350
1,4142012	2,0000000	1,4142114	-0,0000350	2,0000000	-0,0000060
1,4142114	2,0000000	1,4142132	-0,0000060	2,0000000	-0,0000010
1,4142132	2,0000000	1,4142135	-0,0000010	2,0000000	-0,0000002
1,4142135	2,0000000	1,4142136	-0,0000002	2,0000000	0,0000000
1,4142136	2,0000000	1,4142136	0,0000000	2,0000000	0,0000000

Tableau 7.2 : Résolution par la méthode de fausse position

La solution est $\alpha = 1.4142136$

Comparer le nombre des opérations effectuées pour la recherche de la solution de cette équation par rapport à la méthode dichotomique.

II.5 Méthode de sécante:

Il est possible d'exploiter l'algorithme de fausse position pour construire une série de solution sans passer par la vérification de l'intervalle de solution. Dans ce cas la méthode est dite méthode de sécante.

La méthode consiste à prendre comme les deux premières solutions les bornes d'intervalle $[a, b]$:

$$x_0 = a$$

$$x_1 = b$$

pour $i > 1$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (II.6)$$

l'algorithme devient :

```

Début
Lire  $a, b, \epsilon$ 
 $x_0 = a$ 
 $x_1 = b$ 
 $n = 1$ 
Faire  $|x_n - x_{n-1}| > \epsilon$ 
 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)(x_n - x_{n-1}) / (f(x_n) - f(x_{n-1}))$ 
 $n = n + 1$ 
tant que  $|x_n - x_{n-1}| > \epsilon$ 
fin
  
```

II.6 Ordre de convergence d'une méthode d'approximation :

Si on approche une solution α d'une équation de type $f(x)=0$ par une suite récurrente x_n et cette suite vérifie la condition :

$$\exists C \in [a, b] \quad \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} \leq C < 1 \quad \forall n > n_0 \quad (II.7)$$

donc la suite récurrente converge vers α avec un ordre p .

Où $n_0 \geq 0$ est un entier convenable. Dans de tel cas, la méthode est dite de l'ordre p . A noter que si p est égal à 1, pour que x_n converge vers α il est nécessaire que C soit inférieur à 1 ($C < 1$), C , dans ce cas, est le facteur de convergence. Si $p=1$ la suite converge linéairement, $p=2$ on parle de convergence quadratique.

La méthode de Dichotomie est globalement convergente est on ne peut pas estimer la valeur de C est p

II.7 Méthode de Newton :

La méthode de Newton a été découverte par Isaac Newton et publiée dans « Method of Fluxions » en 1736. Bien que la méthode soit décrite par Joseph Raphson (1648-1715) dans « Analysis Aequationum » en 1690, les sections d'intérêt de la Méthode de Fluxions avaient déjà été écrites, en 1671.

La méthode de Newton se base sur la notion de dérivé. Si x_0 est une approximation de la solution de $f(x)=0$ dans l'intervalle $[a, b]$, nous corrigeons cette solution par $x_1=x_0+h$ ou h est une petite valeur. Si on utilise le développement limité de Taylor :

$$f(x_1) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0) \quad (\text{II.8})$$

Si $f(x_1)=0$ alors $h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ donc

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Et pour une certaine étape n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{II.9})$$

On remarque bien que lorsque x_n est une solution alors $f(x_n) \rightarrow 0$ donc $x_n \rightarrow x_{n+1}$.

Interprétation Graphique[2] :

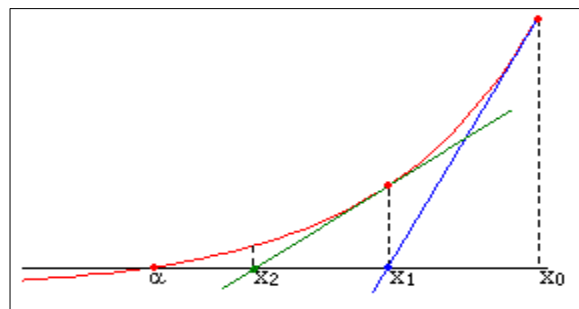


Figure II. 4 Interprétation graphique de la méthode de Newton.

On commence à partir d'une solution initiale au point x_0 et on cherche l'intersection de la tangente de la fonction $f(x)$ en ce point avec l'axe des abscisse noté x_1 qui sera la nouvelle solution et on continue jusqu'à obtenir une bonne approximation.

Algorithme :

```

Début
Lire  $x_0, \epsilon$ 
 $n=0$ 
Faire
 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ 
 $n=n+1$ 
tant que  $|x_n - x_{n-1}| > \epsilon$ 
fin

```

Exemple : reprendre l'exercice précédant en utilisant la méthode de Newton $x_0=2.0$.

Solution :

n	x_n	$f'(x_n)$	$f(x_n)$
0	2.0000000	4.0000000	2.00000000
1	1.5000000	3.0000000	0.25000000
2	1.4166666	2.8333333	0.00694444
3	1.4142156	2.8284313	0.00000601
4	1.4142135	2.8284271	0.00000000

Tableau 2.3 : Résolution par la Méthode de Newton

Remarque :

La méthode de Newton est très pratique question de rapidité de convergence mais il existe des situations où la divergence est frappante, ce-ci est due à :

- 1) L'existence d'un point d'inflexion dans l'intervalle d'étude (figure II.5.a).
- 2) L'existence d'une solution multiple $f'(x)=0$ (figure II.5.b).
- 3) Lorsqu'il y a des minimums locaux (figure II.5.c).

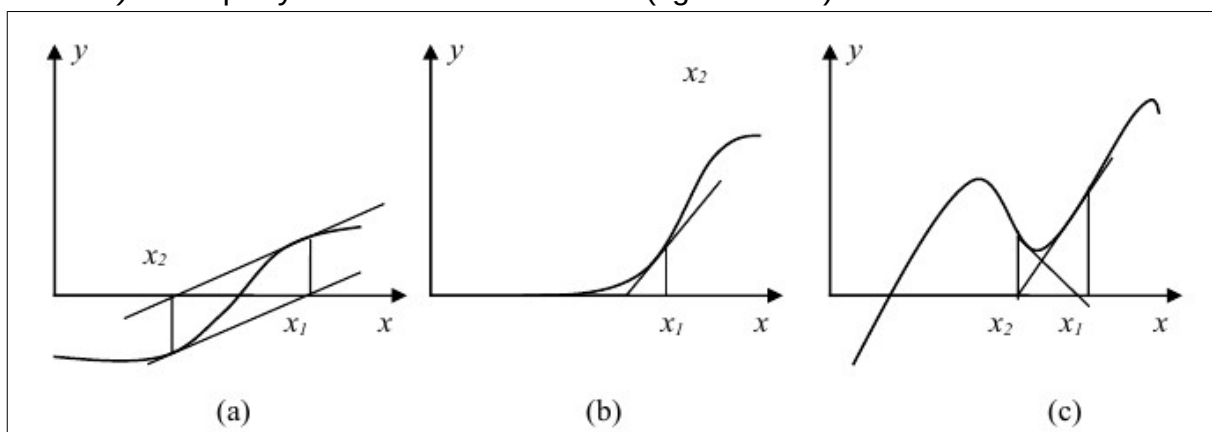


Figure II.5 : Divergence de la méthode de Newton

Bien que la méthode soit très efficace, certains aspects pratiques doivent être pris en compte. Avant tout, la méthode de Newton nécessite que la dérivée soit effectivement calculée. Dans les cas où la dérivée est seulement estimée en prenant la pente entre deux points de la fonction, la méthode prend le nom de *méthode de la sécante*, moins efficace (d'ordre 1,68) et inférieure à d'autres algorithmes. Par ailleurs, si la valeur de départ est trop éloignée du vrai zéro, la méthode de Newton peut entrer en boucle infinie sans produire d'approximation améliorée. À cause de cela, toute implémentation pratique de la méthode de Newton doit inclure un code de contrôle du nombre d'itérations.

Ordre de convergence de la méthode de Newton :

Soit $\alpha \in [a, b]$ solution de l'équation $f(x)=0$ en utilisant un développement limité

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(\eta)(x - x_n)^2$$

ou η est une valeur inconnue entre x et x_n si $x = \alpha$ (la solution) alors $f(x) = f(\alpha) = 0$

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(\eta)(\alpha - x_n)^2$$

si on divise sur $f'(x_n)$ et on réarrange alors :

$$\alpha - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = \frac{-f''(\eta)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2$$

par la formule de la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{alors :}$$

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{f''(\eta)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$$

$$\text{est si on prend } C = \left| \frac{f''(\eta)}{2f'(x_n)} \right|$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|(x_n - \alpha)|^2} = C \quad (\text{II.10})$$

et pour n grand $f''(\eta) \simeq f''(x_n)$ donc la convergence de la méthode newton est

quadratique si $\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} < 1$ ou $\left| \frac{\max f''(x)}{2\min f'(x)} \right| < 1$

Choix de la solution initiale pour la méthode de Newton :

Graphiquement si on choisie une solution initiale $x_0=a$ de sorte que $f(x_0).f''(x_0) < 0$ la tangente a la courbe $y=f(x)$ au point A $(a,f(a))$ engendre un point x_1 a extérieure de l'intervalle $[a,b]$ c'est pour cela pour la bonne convergence de la méthode il est préférable de prendre :

$$f(x_0).f''(x_0) > 0 \quad (\text{II.11})$$

II.8 Méthode d'approximation successive [2] :

La méthode d'approximation successive est une des méthodes itératives les plus anciennes. C'est méthode très utile pour la détermination des racines des équations du type $f(x)=0$, et même pour les systèmes des équation non linéaires. Elle se base sur le schéma suivant :

Soit l'équation $f(x)=0$, on essaye de l'écrire sous la forme $g(x)=x$ puis on prend le schéma itératif suivant : on partant d'une solution initiale x_0 on le substitue dans $g(x)$ de manière à obtenir une nouvelle solution $x_1=g(x_0)$ et on répète jusqu'à obtenir une solution acceptable. Donc on construit une suite numérique des valeurs (x_n) dont les valeurs convergent vers la solution de l'équation $f(x)=0$.

La forme itérative :

$$\begin{array}{l} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0 \text{ donnée} \end{array} \quad (\text{II.12})$$

Le processus d'itération est arrêté lorsque $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ ou $f(x_n) < \zeta$.

Exemple :

Prenons l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ (qui à pour racine -1 et 3)

Nous pouvons la rendre sous la forme $x = g_1(x) = \sqrt{2x+3}$ et pour $x_0=4$ nous avons les résultats suivants :

n	x_n
0	4
1	3.31662
2	3.10375
3	3.03439
4	3.0114

Tableau 2.4 : Solution par la méthode d'approximation successive.

On remarque que les valeurs de x_n convergent vers 3.

Il est possible de vérifier que si on change de forme pour la même équation $x = g_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3.0)$ l'exemple précédant, on peut obtenir une divergence.

Théorème de point fixe :

La contraction :

soit la fonction $g(x)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$, s'il existe un réel $0 < k < 1$ de sorte que pour $x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq k |x_2 - x_1| \quad (\text{II.13})$$

on dit que la fonction $g(x)$ est contractante et

soit $g \in [a, b]$ et pour $x \in [a, b]$ et supposant que g' existe et s'il existe un réel $0 < k < 1$

$$|g'(x)| < k \quad \text{pour tout } x \in [a, b]$$

pour un x_0 donné appartenant à $[a, b]$ la séquence

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad n \geq 1$$

converge vers un point fixe unique $\alpha \in [a, b]$

Démonstration :

soit α solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $\alpha = g(\alpha)$

$$|x_n - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| = |g'(\xi_n)| |x_{n-1} - \alpha| \leq k |x_{n-1} - \alpha| \quad \xi_n \in [a, b]$$

en appliquant cette inégalité intuitive on obtient :

$$|x_n - \alpha| \leq k |x_{n-1} - \alpha| \leq k^2 |x_{n-2} - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha| \quad (\text{II.14})$$

$$k < 1 \quad \text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |x_0 - \alpha| = 0$$

donc :

x_n converge vers α

Théorème : si $g(x)$ et $g'(x)$ sont deux fonctions continues dans l'intervalle contenant la racine x et si $|g'(x)| < 1$ pour tous les points de cet intervalle alors $x_n = g(x_{n-1})$ est un schéma itératif convergeant vers la solution α de l'équation $x = g(x)$.

Cette condition est suffisante et non nécessaire.

Propriété : (théorème Ostrowski) soit α le point fixe d'une fonction g , continue est différentiable dans un voisinage J de α . Si $|g'(\alpha)| < 1$ alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite $\{x_n\}$ converge vers α pour chaque $x_{(0)}$ tel que $|x_{(0)} - \alpha| < \delta$.

Ordre de Convergence :

Dans le cas de la méthode du point fixe l'ordre de convergence est s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = |g'(x_n)| \quad (\text{II.15})$$

On peut prendre comme approche globale $|g'(x_n)| < \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$ pour confirmer

la convergence.

Si la fonction $g(x)$ est deux fois contenue et dérivable et :

$$g'(x) = 0 \text{ et } g''(x) \neq 0$$

alors :

la méthode de point fixe converge avec un ordre 2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{1}{2} |g''(x_n)| \quad (\text{II.16})$$

dans le cas général :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} < C \quad (\text{II.17})$$

Ou $C = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$

Algorithme :

```

Début
Lire  $x_0, n$ 
 $n = 0$ 
Faire
 $x_{n+1} = g(x_n)$ 
 $n = n + 1$ 
tant que  $|x_n - x_{n-1}| > \varepsilon$ 
fin
  
```

Interprétation Graphique :

Géométriquement cette méthode s'explique de la façon suivante :

Dans le plan xoy on construit la courbe $y=g(x)$ et la droite $y=x$ toute racine de l'équation $f(x)=0$ est le point d'intersection des deux courbes. En partant d'un point x_0 on construit la ligne polygonale (escalier figure II.6.(a), Spirale figure II.6.(b))

Les segments horizontaux du polygone se rétrécissent, dans de la convergence, pour devenir un seul point qui n'est d'autre que la solution de l'équation $f(x)=0$. Pour une solution de forme spirale $g'(x)$ est négative, si non on obtient la forme escalier.

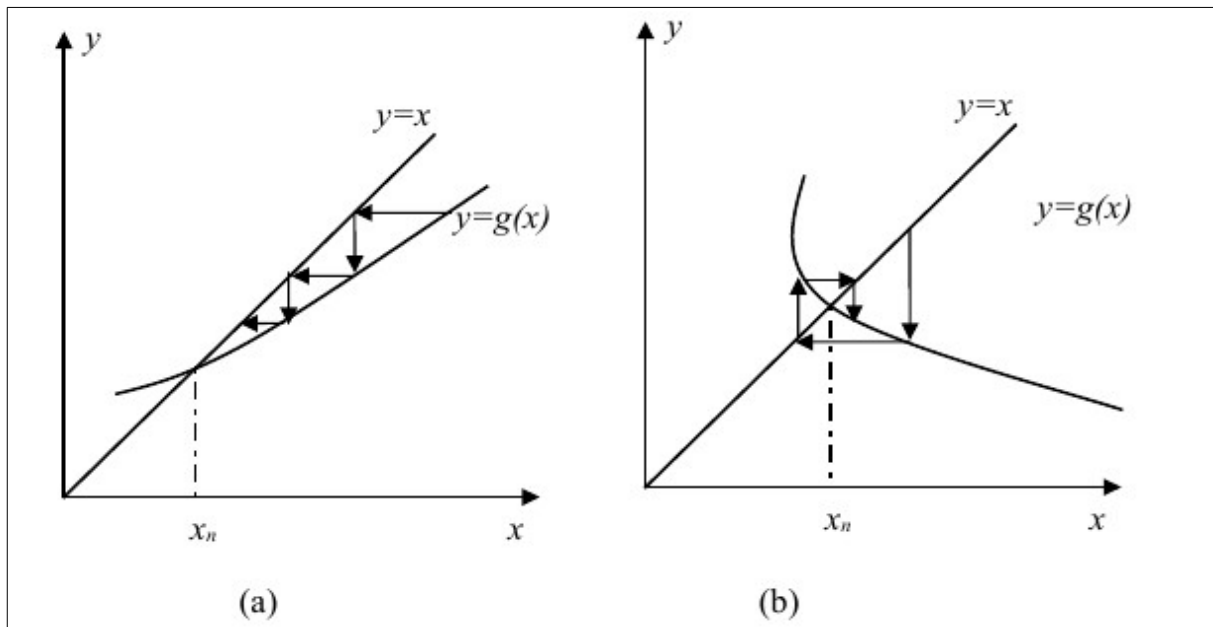


Figure II.6:Convergence de la méthode de point fixe

Nombre des itérations de la méthode de point fixe :

Dans la méthode de point fixe , si α est une racine donc $\alpha=g(\alpha)$ donc on peut démontrer que :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \quad (II.18)$$

avec

$$k = \max_{[a,b]} (|g'(x)|)$$

Le nombre des itérations de la méthode de point fixe est donné par la formule suivante :

$$\text{si } |x_n - \alpha| \leq \epsilon$$

alors

$$n \geq \frac{\ln(\epsilon) + \ln(1-k) - \ln|x_1 - x_0|}{\ln(k)} \quad (\text{II.19})$$

Démonstration :

Calcul des nombres des itérations :

nous avons

$$|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq k^2|x_{n-2} - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha|$$

avec α est la solution et $k = \max |g'(x)|$

nous avons :

$$|x_0 - \alpha| = |x_0 + x_1 - x_1 - \alpha|$$

$$|x_0 - \alpha| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - \alpha|$$

$$|x_0 - \alpha| \leq |x_0 - x_1| + k|x_0 - \alpha|$$

$$|x_0 - \alpha| - k|x_0 - \alpha| \leq |x_0 - x_1|$$

$|x_0 - \alpha|(1-k) \leq |x_0 - x_1|$ donc $|x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{(1-k)}|x_0 - x_1|$ qui est le même que :

$$|x_0 - \alpha| \leq \frac{1}{(1-k)}|x_1 - x_0|$$

alors :

$$|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq k^2|x_{n-2} - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha| \leq \frac{k^n}{(1-k)}|x_1 - x_0|$$

finalement :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{(1-k)}|x_1 - x_0|$$

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{(1-k)}|x_1 - x_0| \quad (\text{II.20})$$

$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{(1-k)} |x_1 - x_0| \leq \epsilon$ donc : $k^n \leq \frac{(1-k)\epsilon}{|x_1 - x_0|}$ et lorsqu'on passe au logarithme normale :

$$n \geq \frac{\ln((1-k)\epsilon) - \ln(|x_1 - x_0|)}{\ln(k)}$$

II.9 Méthode d'approximation successive améliorée [5] :

Il est possible d'accélérer la convergence de la méthode d'approximation successive en adoptant la technique suivante :

Partant de $f(x)=0$

On passe de $x=g(x)$ à $x+\lambda x=g(x)+\lambda x$ (ou $\lambda \neq -1$)

Soit encore $x = \frac{g(x) + \lambda x}{(1+\lambda)} = G(x)$

on choisit λ de façon à ce que $G'(x_n)=0$ pour chaque itération ce qui nous amène à :

$$G'(x) = \frac{g'(x) + \lambda}{(1+\lambda)} = 0$$

Où $\lambda = -g'(x)$ donc :

$$x_{n+1} = \frac{g(x_n) - g'(x_n)x_n}{1 - g'(x_n)} \quad (\text{II.21})$$

Exemple : résoudre l'équation $xe^x - 1 = 0$ par la méthode d'approximation successive standard et puis améliorer et comparer (on donne $\epsilon = 0.001$)

Solution : Méthode d'approximation successive standard :

$$x_0 = 1.0$$

$$x_{n+1} = e^{-x_n}$$

n	x_n	$g(x_n)$	$f(x_n)$
0	1,0000000	0,3678794	1,7182818
1	0,3678794	0,6922006	-0,4685364
2	0,6922006	0,5004735	0,3830915
3	0,5004735	0,6062435	-0,1744679
4	0,6062435	0,5453958	0,1115662
5	0,5453958	0,5796123	-0,0590335
6	0,5796123	0,5601155	0,0348087
7	0,5601155	0,5711431	-0,0193080
8	0,5711431	0,5648793	0,0110887
9	0,5648793	0,5684287	-0,0062442
10	0,5684287	0,5664147	0,0035557

Tableau 2.5 Solution par la méthode d'approximations successives.

$$X_0=1.0, \quad x_{n+1}=G(x_n),$$

$$G(x)=\frac{e^{-x}+xe^{-x}}{1.0+e^{-x}}$$

n	x_n	$G(x_n)$	$f(x_n)$
1	1,0000000	0,5378828	1,7182818
2	0,5378828	0,5669870	-0,0789414
3	0,5669870	0,5671433	-0,0004318
4	0,5671433	0,5671433	0,0000000
5	0,5671433	0,5671433	0,0000000

Tableau 2.6 : Solution par la méthode d'approximations successives amélioré .

Bibliographie

- [1] C.F.Gerald, P. O. Wheatley « Aplied Numerical Analysis » 4th edition, Addislon-Wesley 1990
- [2]E. Süli ,D. F. Mayers « An Introduction to Numerical Analysis » cambridge university press. 2003.
- [3] S. D. Conte ,Carl de Boor « ELEMENTARY NUMERICAL ANALYSIS An Algorithmic Approach » McGraw-Hill Book Company1980.
- [4] W.Cheney, D.Kincaid « NUMERICAL MATHEMATICS AND COMPUTING »6th edition Thomson Brooks/Cole. 2008.
- [6] M. Fellah, N. H. Allal « Exercices corrigés en Analyse Numérique Élémentaire » OPU,2008.
- [7] L.F.Shampine, R.C.Allen, S.Pruess « Fundamentals of Numerical Compupting » JOHN Wiley & SONS 1997
- [8] J.D. Hoffman « Numerical Methods for Engineers and Scientists » 2nd edition,MacGraw-Hill inc. 1992.